Total number of printed pages–20

3 (Sem–5/CBCS) MAT RE 1/2

2024

Jawaharlal Nehru College Library
Estd.-1964
Boko, Kamrup

MATHEMATICS

(Regular Elective)

Answer the Questions from any one Option.

OPTION–A

Paper : MAT–RE–5016

(Number Theory)

OPTION–B

Paper : MAT–RE–5026

(Discrete Mathematics)

Full Marks : 80

Time : Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Answer ***either*** *in English* ***or*** *in Assamese.*

Contd.

OPTION–A

Paper : MAT–RE–5016

(Number Theory)

1. Choose the correct options : 1×10=10

শুদ্ধ উত্তৰ বাচি উলিওৱা ঃ

(i) Which of the following equations has no solution?

তলৰ কোনটো সমীকৰণৰ সমাধান নাই?

(a) $18x+5y=48$

(b) $54x+21y=906$

(c) $123x+360y=99$

(d) $158x-57y=7$

(ii) Which of the following is not a Mersenne number?

তলৰ কোনটো এটা Mersenne সংখ্যা নহয়?

(a) 31

(b) 125

(c) 127

(d) 7

(iii) The value of ϕ (360) is

ϕ (360) ৰ মান হ'ব

(a) 36

(b) 96

(c) 180

(d) 18

(iv) Which one of the following statements is true?

তলৰ কোনটো উক্তি সত্য?

(a) If (যদি) $a \equiv b \pmod{n}$, then (তেন্তে) $a+c \equiv b+c \pmod{n}$

(b) If (যদি) $a \equiv b \pmod{n}$, then (তেন্তে) $ac \equiv bc \pmod{n}$

(c) Both *(a)* and *(b)* are true

(a) আৰু *(b)* দুয়োটাই সত্য

(d) Both *(a)* and *(b)* are false

(a) আৰু *(b)* দুয়োটাই অসত্য

(v) The number of distinct solution of the congruence $9x \equiv 21 \pmod{30}$ is

$9x \equiv 21 \pmod{30}$ congruence টোৰ স্বতন্ত্ৰ সমাধানৰ সংখ্যা হ'ব

(a) 1

(b) 3

(c) 7

(d) 9

(vi) Which of the following theorems states that "If p is a prime and $p \nmid a$, then $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$" ?

তলৰ কোনটো উপপাদ্যৰ মতে "যদি p এটা মৌলিক সংখ্যা আৰু $p \nmid a$ হয়, তেন্তে $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$" ?

(a) Dirichlet's theorem

Dirichlet ৰ উপপাদ্য

(b) Wilson's theorem

Wilson ৰ উপপাদ্য

(c) Euler's theorem

Euler ৰ উপপাদ্য

(d) Fermat's little theorem

Fermat ৰ সৰু উপপাদ্য

(vii) Which of the following sets is a reduced set of residues modulo 9?

তলৰ কোনটো সংহতি modulo 9 ৰ হ্ৰাসমান অৱশেষৰ সংহতি?

(a) 3, 5, 6, 14, 19, 21

(b) – 30, – 15, 2, 7, 12, 21

(c) – 31, – 16, – 8, 13, 25, 80

(d) None of these

ওপৰৰ এটাও নহয়

(viii) The value of $\sigma(180)$ is

$\sigma(180)$ ৰ মান হ'ব

(a) 90

(b) 180

(c) 540

(d) 546

(ix) Möbius μ-function of 60 is

60 ৰ Möbius μ-ফলন হ'ব

(a) 1

(b) –1

(c) 0

(d) 2

(x) The highest power of 5 that divides 50! is

50! ক হৰণ কৰিব পৰা 5 ৰ সৰ্ব্বোচ্চ ঘাত হ'ব

(a) 12

(b) 18

(c) 24

(d) 30

2. Answer the following questions : 2×5=10
তলৰ প্ৰশ্নকেইটাৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) Show that the only prime of the form $n^3 - 1$ is 7.
দেখুওৱা যে $n^3 - 1$ ধৰণৰ একমাত্ৰ মৌলিক সংখ্যা হৈছে 7.

(b) Prove that if $a \equiv b \pmod{n}$ and $m \mid n$, then $a \equiv b \pmod{m}$.
প্ৰমাণ কৰা যে যদি $a \equiv b \pmod{n}$ আৰু $m \mid n$ হয়, তেন্তে $a \equiv b \pmod{m}$.

(c) If $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}$ is the prime factorization of $n > 1$, then prove that $\tau(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1)\ldots(k_r + 1)$
যদি $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}$, $n > 1$ ৰ মৌলিক উৎপাদকীকৰণ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে
$\tau(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1)\ldots(k_r + 1)$.

(d) Find the value of $\sum_{d \mid 10} \mu(d)$.
$\sum_{d \mid 10} \mu(d)$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(e) If p is a prime and $k > 0$, then prove that $\phi(p^k) = p^k\left(1 - \frac{1}{p}\right)$.
যদি p এটা মৌলিক সংখ্যা আৰু $k > 0$ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $\phi(p^k) = p^k\left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

3. Answer ***any four*** questions : 5×4=20
যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Prove that there are an infinite number of primes of the form $3n + 2$.
প্ৰমাণ কৰা যে $3n + 2$ ধৰণৰ অসীম সংখ্যক মৌলিক সংখ্যা আছে।

(b) Solve the linear congruence
$34x \equiv 60 \pmod{98}$
$34x \equiv 60 \pmod{98}$ linear congruence টো সমাধান কৰা।

(c) Prove that $11^{104} + 1$ is divisible by 17.
প্ৰমাণ কৰা যে $11^{104} + 1$ ক 17 ৰে হৰণ যায়।

(d) If p is a prime, then prove that $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.
যদি p এটা মৌলিক সংখ্যা হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $((p-1)! \equiv -1 \pmod{p})$।

(e) Prove that $\sigma(n)$ is an odd integer if and only if n is a perfect square or twice a perfect square.
প্রমাণ কৰা যে $\sigma(n)$ এটা অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা যদি আৰু যদিহে n এটা প্ৰকৃত বৰ্গ সংখ্যা বা এটা প্ৰকৃত বৰ্গ সংখ্যাৰ দুগুণ।

(f) If $n > 2$, then show that $\phi(n)$ is an even integer.
যদি $n > 2$ হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $\phi(n)$ এটা যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা।

4. Answer **any four** of the following questions : 10×4=40
তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ *যিকোনো চাৰিটাৰ* উত্তৰ কৰা ঃ

(i) (a) Determine all the positive integer solutions of the equation
$$18x + 5y = 48$$
$18x + 5y = 48$ সমীকৰণটোৰ সকলো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ সমাধান উলিওৱা।

(b) Show that if $a \geq 2$ and $a^m + 1$ is prime, then a is even and m is a power of 2.
দেখুওৱা যে যদি $a \geq 2$ আৰু $a^m + 1$ মৌলিক সংখ্যা হয়, তেন্তে a যুগ্ম আৰু m, 2ৰ ঘাত হ'ব। 5+5=10

(ii) (a) If p_n is the nth prime number, then prove that $p_n \leq 2^{2n-1}$.
যদি p_n টো nতম মৌলিক সংখ্যা হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $p_n \leq 2^{2n-1}$.

(b) Show that $2^{35} - 1$ is divisible by 31.
দেখুওৱা যে $2^{35} - 1$, 31 ৰে বিভাজ্য। 5+5=10

(iii) (a) If p is a prime and $p \nmid a$, then prove that $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.
যদি p এটা মৌলিক সংখ্যা আৰু $p \nmid a$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

(b) Find the remainder when 15! is divided by 17.
15! ক 17 ৰে হৰণ কৰিলে ভাগশেষ নিৰ্ণয় কৰা। 5+5=10

(iv) State the Chinese Remainder theorem. Use it to solve the following system of congruences : 3+7=10
Chinese Remainder উপপাদ্যটো লিখা। এই উপপাদ্যটো ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ congruence প্ৰণালীটো সমাধান কৰা ঃ
$$x \equiv 1 \pmod{3}$$
$$x \equiv 2 \pmod{5}$$
$$x \equiv 3 \pmod{7}$$

(v) (a) Define a multiplicative function. Prove that the function σ is a multiplicative function.

এটা multiplicative ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্ৰমাণ কৰা যে σ ফলনটো এটা multiplicative ফলন।

(b) If n is a square-free integer and r is the number of prime divisors of n, then show that $\tau(n) = 2^r$.

যদি n এটা বৰ্গমুক্ত অখণ্ড সংখ্যা আৰু n ৰ মৌলিক বিভাজকৰ সংখ্যা হৈছে r, তেন্তে দেখুওৱা যে $\tau(n) = 2^r$.

5+5=10

(vi) State and prove Möbius inversion formula. 2+8=10

Möbius inversion সূত্ৰটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

(vii) (a) If N is a positive integer, then prove that $N = \sum_{n=1}^{2N} \tau(n) - \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{2N}{n}\right]$

যদি N এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $N = \sum_{n=1}^{2N} \tau(n) - \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{2N}{n}\right]$

(b) Evaluate $\sum_{n=1}^{6} n\left[\frac{6}{n}\right]$

$\sum_{n=1}^{6} n\left[\frac{6}{n}\right]$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

6+4=10

(viii) (a) If n is a positive integer, then prove that

$$\phi(n) = n\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$$

যদি n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$\phi(n) = n\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$$

(b) State Euler's theorem and using it find the unit digit of 3^{100}.

Euler ৰ উপপাদ্যটো লিখা আৰু এইটো ব্যৱহাৰ কৰি 3^{100} সংখ্যাটোৰ এককৰ ঘৰৰ অংকটো উলিওৱা।

5+5=10

OPTION–B

Paper : MAT–RE–5026

(Discrete Mathematics)

1. Give very short answer of the following : $1\times10=10$

   (a) When a poset is called totally ordered set?

   আংশিক ক্রমিক সংহতি এটা কেতিয়া সম্পূর্ণ ক্রমিক সংহতি হব?

   (b) Give an example of comparable elements in the poset $(Z^+, |)$, where $|$ stands for divisibility.

   আংশিক ক্রমিক সংহতি $(Z^+, |)$ ত তুলনীয় মৌলৰ উদাহৰণ দিয়া, য'ত $|$ এ বিভাজ্যতা বুজায়।

   (c) Find the supremum of $\{1, 2, 4, 5, 10\}$ in the poset $(Z^+, |)$, where $|$ stands for divisibility.

   আংশিক ক্রমিক সংহতি $(Z^+, |)$ ত $\{1, 2, 4, 5, 10\}$ ৰ নিম্নতম উচ্চসীমা (supremum) নির্ণয় কৰা।

   (d) Define a complete lattice.

   এটা সম্পূর্ণ লেটিছৰ সংজ্ঞা দিয়া।

   (e) When is a lattice called modular lattice?

   কেতিয়া এটা লেটিছক মডুলাৰ লেটিছ বুলি কোৱা হয়?

   (f) Draw an OR gate.

   OR gate এটা অংকন কৰা।

   (g) Write De Morgan's laws in Boolean algebra.

   বুলিয়ান এলজেব্রাৰ ডি মৰ্গানৰ নিয়মটো লিখা।

   (h) For any two elements a, b in a Boolean algebra, '$ab'=0$ if and only if $a'+b=1$' ... is true ?

   বুলিয়ান এলজেব্রাৰ এটাৰ দুটা মৌল a, b ৰ বাবে '$ab'=0$ যদি আৰু যদিহে $a'+b=1$' উক্তিটো সত্যনে?

   (i) Define an ordered set.

   এটা ক্রমিক সংহতিৰ সংজ্ঞা দিয়া।

   (j) State the isotonic property of Lattices.

   লেটিছৰ আইছটনিক ধর্মটো উল্লেখ কৰা।

2. Give answer of the following : $2\times5=10$

   (a) Find all four elements sublattices of the lattice $\{S_{30}, D\}$, where S_{30} is the set of divisors of 30 and D means division operation.

   $\{S_{30}, D\}$ লেটিছৰ চাৰি মৌলৰ সকলোবোৰ উপলেটিছ নির্ণয় কৰা, যত S_{30} হ'ল 30 ৰ সকলোবোৰ উৎপাদকৰ সংহতি আৰু D হ'ল বিভাজ্যতা।

(b) Draw the Hasse diagram for the lattice $(\{1, 3, 6, 12, 24\}, |)$, where $|$ stands for divisibility.

$(\{1, 3, 6, 12, 24\}, |)$ লেটিছৰ হেছ চিত্ৰ অংকন কৰা, য'ত $|$ এ বিভাজ্যতা বুজায়।

(c) S is the set of divisors of 18. For any two elements a, b of S, we define $a + b = \text{lcm } [a, b]$, $a.b = \gcd (a, b)$ and $a' = \frac{18}{a}$. Prove that $\{S, +, ., ', 1, 18\}$ is not a Boolean algebra.

S হ'ল 18 ৰ সকলোবোৰ উৎপাদকৰ সংহতি। S ৰ দুটা মৌল ৰ বাবে ধৰা হ'ল $a + b = \text{lcm } [a, b]$, $a.b = \gcd (a, b)$ আৰু $a' = \frac{18}{a}$. প্ৰমাণ কৰা যে $\{S, +, ., ', 1, 18\}$ বুলিয়ান এলজেব্ৰা নহয়।

(d) Draw a diagram for the Boolean expression $(x' + y + z')(xy + xz')$.

বুলিয়ান ৰাশি $(x' + y + z')(xy + xz')$ ক চিত্ৰৰে প্ৰকাশ কৰা।

(e) Draw a circuit diagram for $xy + yz'$.

$xy + yz'$ ৰ বৰ্তনী চিত্ৰ অংকন কৰা।

3. Give answer of the following : ***(any four)*** 5×4=20

(a) Prove that in a distributive lattice, if the complement of an element exists then it is unique.

প্ৰমাণ কৰা যে এটা বিতৰণ লেটিছত যদি কোনো এটা মৌলৰ পূৰক স্থিত হয়, তেন্তে ই অদ্বিতীয় হব।

(b) Draw the Hasse diagram for the lattice $\{S_{42}, D\}$, where S_{42} is the set of divisors of 42 and D means division operation. Determine the complements of all of the elements of $\{S_{42}, D\}$.

$\{S_{42}, D\}$ লেটিছৰ হেছ চিত্ৰ অংকন কৰা য'ত S_{42} হ'ল 42 ৰ সকলোবোৰ উৎপাদকৰ সংহতি আৰু D হ'ল বিভাজ্যতা। $\{S_{42}, D\}$ ৰ সকলোবোৰ মৌলৰ পূৰক মৌলবোৰ নিৰ্ণয় কৰা।

(c) Minimize the function $f(x,y,z,w) = x'y'z'w' + x'y'z'w + x'y'zw' + x'yz'w' + x'yz'w + x'yzw' + xy'z'w' + xy'z'w + xyzw$ by Karnaugh map method.

কার্ণফ মেপৰ সহায়ত

$f(x,y,z,w) = x'y'z'w' + x'y'z'w + x'y'zw' + x'yz'w' + x'yz'w + x'yzw' + xy'z'w' + xy'z'w + xyzw$ ফলনৰ সৰ্বনিম্ন ৰূপ প্ৰকাশ কৰা।

(d) Define a poset. What is dual of a poset? If P and Q are two posets, then show that $P \times Q$ is also a poset. 1+1+3=5

আংশিক ক্ৰমিক সংহতি এটাৰ সংজ্ঞা দিয়া। আংশিক ক্ৰমিক সংহতি এটাৰ ডুৱেল বুলিলে কি বুজা? দুটা আংশিক ক্ৰমিক সংহতি P, Q ৰ বাবে দেখুওৱা যে $P \times Q$ ও এটা আংশিক ক্ৰমিক সংহতি হব।

(e) Draw a circuit for each of the following Boolean functions as given

(i) $f(x,y) = xy$, using only NOR-gates.

(ii) $f(x,y,z) = x + yz$, using only NAND-gates.

2½+2½=5

নিৰ্দেশ অনুসৰি তলৰ বুলিয়ান ফলনৰ বৰ্তনী অংকন কৰা

(i) অকল NOR-গেট ব্যৱহাৰ কৰি $f(x,y) = xy$

(ii) অকল NAND-গেট ব্যৱহাৰ কৰি $f(x,y,z) = x + yz$

(f) Define a DNF in Boolean algebra. Express the expression $xy + yzw'$ in DNF.

বুলিয়ান এলজেব্ৰাত DNF ৰ সংজ্ঞা দিয়া। $xy + yzw'$ ক DNF ত প্ৰকাশ কৰা।

4. Give answer of the following : ***(any four)*** 10×4=40

(a) Define a lattice. When it is called complemented ? Prove that dual of a complemented lattice is complemented.

লেটিছৰ সংজ্ঞা দিয়া। কেতিয়া ইয়াক পূৰকীয় বুলি কোৱা হয়? প্ৰমাণ কৰা যে এটা পুৰকীয় লেটিছৰ ডুৱেল সদায় পূৰকীয় হব।

(b) State the absorption and distribution law for multiplication (.) over addition. (+) in a Boolean algebra and draw their circuits and make truth tables. 3+3+4=10

বুলিয়ান এলজেব্ৰাত এবজৰ্বচন ধৰ্ম আৰু যোগ (+) ৰ ওপৰত পূৰণ (.) ৰ বিতৰণ ধৰ্ম উল্লেখ কৰা আৰু সিহতৰ বৰ্তনীৰ চিত্ৰ অংকন কৰা আৰু সত্যতা তালিকা প্ৰস্তুত কৰা।

(c) Express each of the following expressions in DNF in the variables present :

(i) $xy + xz + x'y'$

(ii) $xyz + (x'y')'$ 5+5=10

তলৰ প্ৰতিটো ৰাশিক তাত থকা চলকবোৰৰ DNF ত প্ৰকাশ কৰা—

(i) $xy + xz + x'y'$

(ii) $xyz + (x'y')$

(d) (i) Transform the following CNF into DNF

$$(a + b' + c)(a + b + c')(a + b' + c')$$
$$(a' + b + c)(a' + b + c')(a' + b' + c)$$

ক CNFৰ পৰা DNF লৈ পৰিবৰ্তন কৰা।

$$(a + b' + c)(a + b + c')(a + b' + c')$$
$$(a' + b + c)(a' + b + c')(a' + b' + c)$$

(ii) Find the complete DNF of $xyz' + x'yz + xy'z$ and its complement.

5+5=10

$xyz' + x'yz + xy'z$ ৰ সম্পূৰ্ণ DNF নিৰ্ণয় কৰা আৰু ইয়াৰ পূৰক নিৰ্ণয় কৰা।

(e) In any Boolean algebra, show that

বুলিয়ান এলজেব্ৰাত দেখুওৱা যে

(i) $ab' + a'b = 0$ if and only if $a = b$.

(ii) $(a + b')(b + c')(c + a') =$
$(a' + b)(b' + c)(c' + a)$

5+5=10

(f) A light bulb is located at staircase in a two-storied building and there are two wall switches, one in the ground floor and the other in the first floor. Design a circuit connecting the switches and the bulb in such a way that either switch may be used to control the light independently of the state of the other. 10

এটা দুমহলীয়া ঘৰৰ ওপৰ মহলালৈ উঠি যোৱা চিৰিত এটা লাইট আছে আৰু তাৰ বাবে দুই মহলাতে দুটা ছুইছ দিয়া আছে। লাইট আৰু ছুইছ সংযোগী এটা বৰ্তনী অংকন কৰা যাতে দুয়োটা মহলাৰ পৰা স্বতন্ত্ৰভাৱে লাইটটো জ্বলাব-নুবাব পাৰি।

(g) Prove that a non-empty finite poset has

(i) at most one least element.

(ii) at most one greatest element.

5+5=10

প্রমাণ কৰা যে এটা অবিভক্ত সসীম আংশিক ক্রমিক সংহতিৰ

(i) সর্বোচ্চ সংখ্যক এটা লঘিষ্ঠ মৌল থাকে।

(ii) সর্বোচ্চ সংখ্যক এটা গৰিষ্ঠ মৌল থাকে।

(h) Find the minimum sum of products for the function $f(a,b,c) = \sum(0,2,3,7)$ by using the Quine-McCluskey's tabulation method. 10

কুইন-মেকক্লাচকী টেবুলেছন ব্যৱহাৰ কৰি $f(a,b,c) = \sum(0,2,3,7)$ ফলনৰ পূৰণফলৰ নিম্নতম সমষ্টি নির্ণয় কৰা।
