Total number of printed pages–11

1 (Sem–3/FYUGP) MAT42MN/(B)

2025

Jawaharlal Nehru College Library
Estd.-1964
Boko, Dist - Kamrup

MATHEMATICS

(Minor)

Paper : MAT4300204 MN

(SET–B)

(Abstract Algebra)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

*Answer **either** in English **or** in Assamese.*

1. Answer the following questions : 1×8=8

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Give an example of a finite abelian group with respect to operation addition.

যোগ প্ৰক্ৰিয়া সাপেক্ষে এটা সসীম এবেলীয় সংঘৰ উদাহৰণ দিয়া।

(b) Who is the generator of a cyclic group?

চক্রীয় গোটৰ উৎপাদক কোন?

(c) State true *or* false :

শুদ্ধ *নে* অশুদ্ধ লিখা ঃ

Every permutation has an inverse

প্রত্যেকটো বিন্যাসেই প্রতিলোমনীয়।

(d) What is the centre of the Dihedral group of order $2n$?

$2n$ মাত্রায় দ্বিবিমিত গোটৰ কেন্দ্র কি?

(e) What is the First Isomorphism theorem?

প্রথম সমৰূপতা উপপাদ্য কি?

(f) Find the order of the permutation :

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$ বিন্যাসটোৰ মাত্রা নির্ণয় কৰা।

(g) Is Z_6 an integral domain?

Z_6 এটা অখণ্ড ক্ষেত্র হয় নে?

(h) What is a maximal ideal?

সর্বোচ্চ আদর্শ কি?

2. Answer ***any six*** of the following questions : 2×6=12

তলত দিয়া *যিকোনো ছয়টা* প্রশ্নৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Give an example of a non-abelian group of order 6.

৬ নং ক্রমৰ এটা অ-এবেলিয়ান গোটৰ উদাহৰণ দিয়া।

(b) Let G be a group and $a \in G$. Show that $\langle a \rangle$ is a subgroup of G.

ধৰা হ'ল G এটা গোট আৰু a ইয়াৰ এটা উপাদান। দেখুৱা যে $\langle a \rangle$ হৈছে G ৰ এটা উপগোট।

(c) Prove that every subgroup of a cyclic group is cyclic.

প্রমাণ কৰা যে এটা চক্রীয় গোটৰ প্রতিটো উপগোট চক্রীয় হয়।

(d) What is meant by cycle of a Permutation ? Give an example.

এটা বিন্যাসৰ চক্ৰ বুলিলে কি বুজা ? এটা উদাহৰণ দিয়া।

(e) Define centre of a group G and give an example.

এটা গোটৰ কেন্দ্ৰ সংজ্ঞা দিয়া আৰু এটা উদাহৰণ দিয়া।

(f) Show that a group of prime order cannot have any non-trivial subgroup. Is it true for a group of finite composite order ?

দেখুৱা যে মৌলিক মাত্ৰাৰ গোট এটাৰ কোনো অ-তুচ্ছ উপগোট থাকিব নোৱাৰে। সসীম সংমিশ্ৰিত ক্ৰমৰ এটা গোটৰ বাবে ই সচা নে ?

(g) If $f : G \to G'$ is a group homomorphism then show that $f(e) = e'$ where e and e' are the identities of G and G' respectively

যদি $f : G \to G'$ এটা গোট সমৰূপতা হয় তেন্তে দেখুৱা যে $f(e) = e'$ ইয়াত e আৰু e' ক্ৰমে G আৰু G'ৰ একক মৌল।

(h) Give an example of subring of a ring which is not an ideal of the ring.

এটা আঙঠিৰ উপআঙঠিৰ উদাহৰণ দিয়া যিটো আঙঠিটোৰ আদৰ্শ নহয়।

(i) Let Φ be an isomorphism from a group G into a group H. Prove that Φ^{-1} is also an isomorphism from H onto G.

ধৰা হ'ল Φ হৈছে Gৰ পৰা H লৈ এটা সমৰূপতা । দেখুৱা যে Φ^{-1} হৈছে Hৰ পৰা Gলৈ এটা সমৰূপতা।

(j) Prove that a field is an integral domain.

প্ৰমাণ কৰা যে এখন ক্ষেত্ৰ এটা সমাকলন ক্ষেত্ৰ হয়।

3. Answer ***any four*** of the following questions : 5×4=20

তলত দিয়া *যিকোনো চাৰিটা* প্ৰশ্নৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Define cyclic group. State and prove that the fundamental theorem of cyclic.

চক্ৰীয় গোটৰ সংজ্ঞা দিয়া। কোৱা আৰু প্ৰমাণ কৰা যে চক্ৰীয় গোটৰ মৌলিক উপপাদ্য।

(b) Let N be a normal subgroup of a group G. Prove that $\frac{G}{N}$ is an abelian if and only if for all $x, y \in G$, $x\,y\,x^{-1}y^{-1} \in N$.

ধৰা হ'ল N হৈছে G এটা গোটৰ স্বাভাৱিক উপগোট। প্ৰমাণ কৰা যে এটা এবেলিয়ান গেটে যদি আৰু যদিহে যদিহে $x\,y\,x^{-1}y^{-1} \in N \;\forall\; x, y \in N$.

(c) Show that converse of Lagrenge's theorem holds in case of finite cyclic groups.

দেখুৱা যে লেগ্ৰেঞ্জৰ উপপাদ্যৰ কনভাৰ্চটো সসীম চক্ৰীয় গোটৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰযোজ্য।

(d) Let H and K be two subgroups of a group G, Where H is normal in G then prove that $\frac{HK}{H} \cong \frac{K}{H \cap K}$.

ধৰা হ'ল H আৰু K হৈছে G এটা গোটৰ দুটা উপগোট যত H এটা স্বাভাৱিক উপগোট। প্ৰমাণ কৰা যে

$$\frac{HK}{H} \cong \frac{K}{H \cap K}$$

(e) Show that *any two* cycles of a permutation of a finite set are disjoint.

দেখুৱা যে এটা সসীম গোটৰ বিন্যাসৰ *যিকোনো দুটা* চক্ৰ বিচ্ছিন্ন।

(f) If A, B, C are ideals of a ring $\mathbb{R}$ such that $B \subseteq A$, then prove that

$$A \cap (B + C) = B + (A \cap C).$$

(g) For every prime p, prove that Z_p the ring of integers modulo p is a field.

সকলো মৌলিক সংখ্যা p-ৰ বাবে, প্ৰমাণ কৰা যে integers modulo p, Z_p এটা ক্ষেত্ৰ হয়।

(h) If D is an integral domain, then prove that the characteristic of D is either zero or a prime number.

যদি D এটা অখণ্ড ক্ষেত্র হয় তেন্তে প্রমাণ কৰা যে D ৰ বৈশিষ্ট্যসমূহ শূন্য হয় বা এটা মৌলিক সংখ্যা হয়।

4. Answer ***any two*** of the following questions : 10×2=20

তলত দিয়া *যিকোনো দুটা* প্রশ্নৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Give an example to show that the product of two subgroups of a group is not a subgroup in general. Also show that if H and K are two subgroups of a group G, then HK is a subgroup of G if and only if $HK = KH$.

এটা গোট G ৰ দুটা উপগোটৰ গুণফল সাধাৰণতে উপগোট নহয় বুলি দেখুৱাবলৈ এটা উদাহৰণ দিয়া। লগতে দেখুৱা যে যদি H আৰু K এটা গোট Gৰ দুটা উপগোট হয় তেন্তে HK এটা উপগোট হয় যদি আৰু কেৱল যদি $HK = KH$ হয়।

(b) Prove that the order of a cyclic group is equal to the order of its generator.

প্রমাণ কৰা যে এটা চক্রীয় গোটৰ ক্রম ইয়াৰ জেনেৰেটৰ ক্রমৰ সমান হয়।

(c) Let G be a group in which

(i) $(ab)^3 = a^3b^3$

(ii) $(ab)^5 = a^5b^5$ for all $a, b \in G$

Prove that G is abelian.

ধৰা হ'ল এটা গোট য'ত

(i) $(ab)^3 = a^3b^3$

(ii) $(ab)^5 = a^5b^5$ for all $a, b \in G$

তেন্তে প্রমাণ কৰা যে G এটা এবেলীয়ন গোট।

(d) Let Φ is an isomorphism from a group G onto a group G'. Prove that —

(i) for every integer n, and for every $a \in G$, $\Phi(a^n) = [\Phi(a)]^n$;

(ii) $|a| = |\Phi(a)| \quad \forall\, a \in G$

ধৰা হ'ল Φ হৈছে, এটা গোট G ৰ পৰা আন এটা গোট G লৈ এটা সমৰূপতা। প্রমাণ কৰা যে প্রতিটো অখণ্ডসংখ্যা n আৰু প্রতিটো গোট Gৰ মৌল aৰ বাবে

(i) $\Phi(a^n) = [\Phi(a)]^n$

(ii) $|a| = |\Phi(a)| \quad \forall\, a \in G$

(e) Define a prime ideal and a maximal ideal. Show that every maximal ideal in a commutative ring with units is a prime ideal. Give *one* example of each in Z.

এটা মৌলিক গোটৰ আদর্শ আৰু এটা সৰ্বোচ্চ আদর্শৰ সংজ্ঞা দিয়া দেখুওৱা যে ঐক্য থকা এটা বগমিটেটিভ বলয়ত থকা প্রতিটো সৰ্বোচ্চ আদর্শ এটা মৌলিক আদর্শ। Z ত প্রত্যেকৰে এটাকৈ উদাহৰণ দিয়া।

———