Total number of printed pages–12

1 (Sem–2/FYUGP) MAT 21 MN/(A)

2026

Jawaharlal Nehru College Library
Estd.- 1964
Boko, Kamrup

MATHEMATICS

(Minor)

SET–A

Paper : MAT4200104MN

(Calculus)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

SET–A

*Answer **either** in English **or** in Assamese.*

1. Answer the following questions : 1×8=8

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Evaluate : $\lim_{x \to -\infty} \left(-7x^5 - 4x^3 + 2x - 9\right)$

মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ $\lim_{x \to -\infty} \left(-7x^5 - 4x^3 + 2x - 9\right)$

(b) A polynomial function in $\mathbb{R}$ is continuous in $\mathbb{R}$ except at $x = 0$.

*(State True **or** False)*

বহুপদী ফলন এটা $x = 0$-ৰ বাহিৰে $\mathbb{R}$-ৰ সকলো মানতে অবিচ্ছিন্ন হয়। *(উক্তিটো সঁচা নে মিছা লিখা)*

(c) What is the n^{th} derivative of x^n?

x^n-ৰ nতম অৱকলজ কিমান?

(d) If the function $f(x) = x(x+3)e^{-x/2}$ satisfies all conditions of Rolle's theorem in $[a, 0]$, then the value of a is _____.

(Fill in the blank)

যদি $f(x) = x(x+3)e^{-x/2}$ ফলনটোৱে $[a, 0]$ অন্তৰালত ৰোলৰ উপপাদ্যৰ সকলো চর্ত সিদ্ধ কৰে, তেন্তে a-ৰ মান হব _____।

(খালী ঠাই পূৰণ কৰা)

(e) If $u = \dfrac{x^{1/4} + y^{1/4}}{x^{1/6} + y^{1/6}}$ and $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = ku$ then the value of k is—

যদি $u = \dfrac{x^{1/4} + y^{1/4}}{x^{1/6} + y^{1/6}}$ আৰু $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = ku$ হয়, তেন্তে k-ৰ মান হ'ল—

(i) $\dfrac{1}{4}$

(ii) $\dfrac{1}{6}$

(iii) $\dfrac{1}{12}$

(iv) $\dfrac{1}{24}$

(Choose the correct answer)

(শুদ্ধ উত্তৰটো বাচি উলিওৱা)

(f) Write the expression for the n^{th} Taylor polynomial $P_n(x)$ of a function f about $x = x_0$.

এটা ফলন f-ৰ বাবে $x = x_0$ সাপেক্ষে Taylor-ৰ nতম বহুপদ $P_n(x)$ ৰাশিটো লিখা।

(g) What is the value of $\int_0^{\pi/2} \sin^8 x \, dx$?

$\int_0^{\pi/2} \sin^8 x \, dx$-ৰ মান কিমান?

(h) If $z = x^4 \sin(xy^3)$, find $\frac{\partial z}{\partial y}$.

যদি $z = x^4 \sin(xy^3)$, তেন্তে $\frac{\partial z}{\partial y}$ উলিওৱা।

2. Answer ***any six*** questions from the following : 2×6=12

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ পৰা *যিকোনো ছটাৰ* উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Show that (দেখুওৱা যে)

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 7} - x \right) = 0 .$$

(b) Let $A \subseteq R$, $f : A \to \mathbb{R}$ and let $|f|(x) : |f(x)|$ for all $x \in A$. If f is continuous at a point $c \in A$, then show that $|f|$ is continuous at c.

ধৰা হ'ল $A \subseteq R$, $f : A \to \mathbb{R}$ আৰু সকলোবোৰ $x \in A$ মানৰ বাবে $|f|(x) : |f(x)|$ বুলি সংজ্ঞায়িত কৰা হৈছে। যদি f ফলনটো $c \in A$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $|f|$ ফলনটোও c বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন হয়।

(c) Find the Maclaurin polynomials p_0, p_1, p_2 for e^x.

e^x-ৰ কাৰণে মেক্‌লৰিন বহুপদ p_0, p_1, p_2 উলিওৱা।

(d) If $x = a(\cos\theta + \theta \sin\theta)$, $y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$, then find $\frac{d^2y}{dx^2}$.

যদি $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$ আৰু $y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$ হয়, তেন্তে $\frac{d^2y}{dx^2}$ নিৰ্ণয় কৰা।

(e) Evaluate (মান উলিওৱা) ঃ

$$\int_0^1 x^2 \left(1 - x^2\right)^{3/2} dx$$

(f) Using the Intermediate Value Theorem, show that the equation $x^3 + x^2 - 2x = 1$ has at least one solution in the interval $(-1, 1)$.

মধ্যৱর্তী মান উপপাদ্যৰ সহায় লৈ দেখুওৱা যে $x^3 + x^2 - 2x = 1$ সমীকৰণটোৰ অন্ততঃ এটা সমাধান $(-1, 1)$ অন্তৰালত আছে।

(g) If $y = \cos^3 x$, then find y_n.

যদি $y = \cos^3 x$ হয়, তেন্তে y_n নির্ণয় কৰা।

(h) Find 'C' of the mean value theorem if $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3);\ x \in [0, 4]$.

Mean value উপপাদ্যৰ 'C' উলিওৱা, যদি $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3);\ x \in [0, 4]$.

(i) If $f(x, y) = e^x \sin y + e^y \sin x$, then show that $f_{xx} + f_{yy} = 0$.

যদি $f(x, y) = e^x \sin y + e^y \sin x$ হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $f_{xx} + f_{yy} = 0$।

(j) If $z = ax^2 + 2hxy + by^2$, then show that $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$.

যদি $z = ax^2 + 2hxy + by^2$ হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$।

3. Answer ***any four*** questions from the following : 5×4=20

তলৰ প্রশ্নসমূহৰ পৰা *যিকোনো চাৰিটাৰ* উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Let (ধৰা হ'ল)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2}, & x < -2 \\ x^2 - 5, & -2 < x \le 3 \\ \sqrt{x+13}, & x > 3 \end{cases}$$

Find (মান নির্ণয় কৰা) :

(i) $\lim_{x \to -2} f(x)$

(ii) $\lim_{x \to 0} f(x)$

(iii) $\lim_{x \to 3} f(x)$ 2+1+2=5

(b) Show that the following function is continuous but not differentiable at $x = 0$.

দেখুওৱা যে তলৰ ফলনটো $x = 0$ত অবিচ্ছিন্ন কিন্তু অৱকলনীয় নহয়।

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x e^{1/x}}{1 + e^{1/x}} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

(c) If $y = \sin x\left(m \sin^{-1} x\right)$, then show that

যদি $y = \sin x\left(m \sin^{-1} x\right)$ হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে

(i) $\left(1 - x^2\right) y_2 - x y_1 + m^2 y = 0$

(ii) $\left(1 - x^2\right) y_{n+2} - (2n+1)\, x y_{n+1} + \left(n^2 - m^2\right) y_n = 0$.

2+3=5

(d) Obtain the reduction formula for $\int \sec^n x\, dx$.

$\int \sec^n x\, dx$-ৰ হ্ৰাসমান সূত্ৰ উলিওৱা।

(e) Show that there is no real number k for which the equation $x^3 - 3x + k = 0$ has two distinct roots in [0, 1].

দেখুওৱা যে এনে কোনো বাস্তৱ সংখ্যা k নাই যাৰ বাবে $x^3 - 3x + k = 0$ সমীকৰণটোৰ [0, 1] অন্তৰালত দুটা পৃথক মূল থাকে।

(f) Using Lagrange's Mean Value Theorem in $[a, b]$, prove that

লাগ্ৰাঞ্জৰ মধ্যমান উপপাদ্য $[a, b]$ অন্তৰালত ব্যৱহাৰ কৰি প্ৰমাণ কৰা যে

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \tan^{-1} b - \tan^{-1} a < \frac{b-a}{1+a^2},\ a > 0,\ b > 0$$

and deduce that (আৰু নিৰ্ণয় কৰা যে)

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}.$$ 3+2=5

(g) Find the Maclaurin's infinite series expansion for $\sin x$.

$\sin x$-ৰ বাবে মেক্‌লৰিনৰ অসীম শ্ৰেণী বিস্তাৰ নিৰ্ণয় কৰা।

(h) If (যদি)

$$u = \tan^{-1}\left(\frac{x^3 + y^3}{x + y}\right),$$

then show that (তেন্তে দেখুওৱা যে)

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u.$$

4. Answer ***any two*** questions from the following : 10×2=20

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ পৰা *যিকোনো দুটাৰ* উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) When a function is said to be differentiable at a point? Discuss the differentiability of the function

$$f(x)=\begin{cases} x & , \ x<1 \\ 2-x & , \ 1\le x\le 2 \\ -2+3x-x^2 & , \ x>2 \end{cases}$$

at $x=1, 2$. 2+8=10

এটা ফলনক এটা বিন্দুত অৱকলনীয় বুলি কেতিয়া কোৱা হয়? $x=1, 2$ বিন্দুত $f(x)$ ফলনটোৰ অৱকলনীয়তা আলোচনা কৰা, য'ত

$$f(x)=\begin{cases} x & , \ x<1 \\ 2-x & , \ 1\le x\le 2 \\ -2+3x-x^2 & , \ x>2 \end{cases}$$

(b) Obtain $\frac{d^n}{dx^n}\left(\sin(ax+b)\right)$. If $y=\sin ax+\cos ax$, then prove that $y_n=a^n\sqrt{\left\{1+(-1)^n \sin 2ax\right\}}$. 4+6=10

$\frac{d^n}{dx^n}\left(\sin(ax+b)\right)$-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

যদি $y=\sin ax+\cos ax$ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$y_n=a^n\sqrt{\left\{1+(-1)^n \sin 2ax\right\}}$$

(c) Obtain the reduction formula for $\int \sin^n x\,dx$. Hence evaluate $\int \sin^5 x\,dx$. 6+4=10

$\int \sin^n x\,dx$-ৰ হ্ৰাসমান সূত্ৰ উলিওৱা। ইয়াৰ সহায়ত $\int \sin^5 x\,dx$-ৰ মান উলিওৱা।

(d) *(i)* State Maclaurin's theorem.

(ii) Use Maclaurin's theorem to find the expansion of $\log\left(1+e^x\right)$ in ascending powers of x to the term containing x^4. 2+8=10

(i) মেক্‌লৰিনৰ উপপাদ্যটো লিখা।

(ii) মেক্‌লৰিনৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি x-ৰ ঊৰ্ধ্বমুখী ঘাত অনুসাৰে $\log\left(1+e^x\right)$-ৰ বিস্তাৰ x^4 যুক্ত পদটোলৈ নিৰ্ণয় কৰা।

(e) If (যদি) $z = x^m f\left(\frac{y}{x}\right) + x^n g\left(\frac{x}{y}\right)$, then prove that (তেন্তে প্রমাণ কৰা যে)

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + mnz$$

$$= (m + n - 1)\left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$