Total number of printed pages–11

1 (Sem–2/FYUGP) MAT 21 MN/(B)

Jawaharlal Nehru College Library
Estd - 1964
Boko, Kamrup

2026

MATHEMATICS

(Minor)

SET–B

Paper : MAT4200104MN

(Calculus)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

SET–B

*Answer **either** in English **or** in Assamese.*

1. Answer the following questions : 1×8=8

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Find $\lim_{x \to +\infty} \left(-4x^8 + 17x^3 - 5x + 1\right)$.

$\lim_{x \to +\infty} \left(-4x^8 + 17x^3 - 5x + 1\right)$ উলিওৱা।

(b) The function $f(x) = |x|$ is differentiable at $x = 0$. State True *or* False.

$f(x) = |x|$ ফলনটো $x = 0$ বিন্দুত অৱকলনীয়। এই উক্তিটো সঁচা *নে* মিছা লিখা।

(c) What is the value of $\int_0^{\pi/2} \cos^9 x \, dx$?

$\int_0^{\pi/2} \cos^9 x \, dx$-ৰ মান কি?

(d) Is Rolle's theorem applicable to the function $f(x) = x(x-1)(x-2)$ in $[0, 2]$. Explain.

$f(x) = x(x-1)(x-2)$ ফলনটোত $[0, 2]$ অন্তৰালত ৰোলৰ উপপাদ্য প্ৰয়োগ কৰিব পাৰি নে? ব্যাখ্যা কৰা।

(e) What is the n^{th} derivative of e^{mx}?

e^{mx}-ৰ nতম অৱকলজটো কি হ'ব?

(f) If $z = x^3 \cos\left(x^2 y^2\right)$, find $\frac{\partial z}{\partial x}$.

যদি $z = x^3 \cos\left(x^2 y^2\right)$, তেন্তে $\frac{\partial z}{\partial x}$ উলিওৱা।

(g) The degree of the homogeneous function $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}$ is

সমজাতীয় ফলন $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}$-ৰ মাত্ৰা (ডিগ্ৰী) হ'ল

(i) -1

(ii) 1

(iii) 2

(iv) 0

(Choose the correct answer)
(শুদ্ধ উত্তৰটো বাচি উলিওৱা)

(h) State the Leibnitz theorem.

লীবনিট্জৰ উপপাদ্যটো লিখা।

2. Answer ***any six*** from the following questions : 2×6=12

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ পৰা *যিকোনো ছটাৰ* উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Evaluate $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$.

$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$ -ৰ মান উলিওৱা।

(b) Let $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ and let $f(x) \geq 0$ for all $x \in A$. Let $(\sqrt{f})(x) := \sqrt{f(x)}$ for $x \in A$. If f is continuous at a point $c \in A$, then show that $\sqrt{f}$ is continuous at c.

ধৰা হ'ল $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ আৰু সকলোবোৰ $x \in A$ মানৰ বাবে $(\sqrt{f})(x) := \sqrt{f(x)}$ বুলি সংজ্ঞায়িত কৰা হৈছে, য'ত $f(x) \geq 0$। যদি f ফলনটো $c \in A$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $\sqrt{f}$ ফলনটোও c বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন হয়।

(c) Find the Taylor polynomials p_0 and p_1 for $\ln x$ about $x = 2$.

$x = 2$ সাপেক্ষে $\ln x$-ৰ বাবে টেইলৰৰ বহুপদ p_0 আৰু p_1 উলিওৱা।

(d) Evaluate (মান উলিওৱা) :

$$\int_0^1 \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

(e) Using Intermediate Value Theorem, show that the equation $x^3 - x - 1 = 0$ has at least one solution in the interval $(1, 2)$.

মধ্যৱৰ্তী মান উপপাদ্যৰ সহায় লৈ দেখুওৱা যে $x^3 - x - 1 = 0$ সমীকৰণটোৰ অন্ততঃ এটা সমাধান $(1, 2)$ অন্তৰালত আছে।

(f) If $y = x^n e^x$, then find $\frac{d^n y}{dx^n}$.

যদি $y = x^n e^x$ হয়, তেন্তে $\frac{d^n y}{dx^n}$ নিৰ্ণয় কৰা।

(g) Find 'C' of the mean value theorem if $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$; $x \in [-5, 3]$.

Mean value উপপাদ্যৰ 'C' উলিওৱা, য'ত

$f(x)=\sqrt{25-x^2}\ ;\ x\in[-5,3]$।

(h) If $z=x^4\ln\left(1+xy^{-3/5}\right)$, find $\frac{\partial z}{\partial x}$ and $\frac{\partial z}{\partial y}$.

যদি $z=x^4\ln\left(1+xy^{-3/5}\right)$ হয়, তেন্তে $\frac{\partial z}{\partial x}$ আৰু $\frac{\partial z}{\partial y}$ নির্ণয় কৰা।

(i) If $f(x,y,z)=xyz+x^2y^3z^4$, then find f_{xyz} and f_{yzx}.

যদি $f(x,y,z)=xyz+x^2y^3z^4$ হয়, তেন্তে f_{xyz} আৰু f_{yzx} নির্ণয় কৰা।

(j) If $f(x,y)=e^x\sin y+e^y\sin x$, then show that $f_{xx}+f_{yy}=0$.

যদি $f(x,y)=e^x\sin y+e^y\sin x$ হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $f_{xx}+f_{yy}=0$।

3. Answer ***any four*** from the following questions : 5×4=20

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ পৰা *যিকোনো চাৰিটাৰ* উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Find (মান নির্ণয় কৰা) ঃ

(i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{5x^2-2}}{x+3}\right)$

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+7}-x\right)$ 3+2=5

(b) Discuss the continuity of the function f at $x=0$, where

f ফলনটোৰ $x=0$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্নতাৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা, য'ত

$$f(x)=\begin{cases}\frac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

(c) If $y=\cos\left(m\sin^{-1}x\right)$, then show that

যদি $y=\cos\left(m\sin^{-1}x\right)$ হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে

(i) $\left(1-x^2\right)y_2-xy_1+m^2y=0$

(ii) $\left(1-x^2\right)y_{n+2}-(2n+1)\,xy_{n+1}+\left(m^2-n^2\right)y_n=0$ 2+3=5

(d) Evaluate (মান উলিওৱা) :

$$\int_0^a x^2\left(a^2-x^2\right)^{9/2}\,dx$$

(e) Show that between any two roots of $e^x \cos x = 1$, there exists at least one root of $e^x \sin x - 1 = 0$.

দেখুওৱা যে $e^x \cos x = 1$-ৰ যিকোনো দুটা মূলৰ মাজত $e^x \sin x - 1 = 0$-ৰ অন্ততঃ এটা মূল অৱশ্যেই থাকে।

(f) Use the Lagrange's Mean Value Theorem to prove that

লাগ্ৰাঞ্জৰ মধ্যমান উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি প্ৰমাণ কৰা যে

$$\frac{x}{1+x^2} < tan^{-1} x < x,\ x > 0$$

(g) Find the Maclaurin's infinite series expansion for $\frac{1}{1-x}$.

$\frac{1}{1-x}$-ৰ বাবে মেক্‌লবিনৰ অসীম শ্ৰেণী বিস্তাৰ নিৰ্ণয় কৰা।

(h) If $u = log\left\{\frac{x^4+y^4}{x+y}\right\}$, show by Euler's theorem that $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 3$.

যদি $u = log\left\{\frac{x^4+y^4}{x+y}\right\}$ হয়, তেন্তে অয়লাৰৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত দেখুওৱা যে

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 3$$

4. Answer ***any two*** from the following questions : 10×2=20

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ পৰা *যিকোনো দুটাৰ* উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Show that the function f defined by

$$f(x) = \begin{cases} -3x & , \ x > -2 \\ -x+4 & , \ -2 \le x < 0 \\ x+4 & , \ 0 \le x < 2 \\ 3x & , \ x \ge 2 \end{cases}$$

is not derivable at $x = -2$, 0 and 2.

দেখুওৱা যে

$$f(x)=\begin{cases}-3x & , \quad x>-2\\ -x+4 & , \quad -2\le x<0\\ x+4 & , \quad 0\le x<2\\ 3x & , \quad x\ge 2\end{cases}$$

ফলনটো $x=-2$, 0 আৰু 2 বিন্দুত অৱকলনীয় নহয়।

(b) (i) If $I_n=\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n \log x\right)$, prove that

$$I_n = n\,I_{n-1}+(n-1)!$$

যদি $I_n=\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n \log x\right)$ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$I_n = n\,I_{n-1}+(n-1)!$$

(ii) By finding in two different ways the n^{th} derivative of x^{2n}, prove that

x^{2n}-ৰ n-তম অৱকলজ দুটা ভিন্ন পদ্ধতিত নিৰ্ণয় কৰি প্ৰমাণ কৰা যে

$$1+\frac{n^2}{1^2}+\frac{n^2(n-1)^2}{1^2.2^2}+\frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{1^2.2^2.3^2}+\ldots=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

4+6=10

(c) Obtain the reduction formula for $\int \cos^n x\,dx$. 6+4=10

Hence evaluate $\int \cos^6 x\,dx$.

$\int \cos^n x\,dx$-ৰ হ্ৰাসমান সূত্ৰ উলিওৱা। ইয়াৰ সহায়ত $\int \cos^6 x\,dx$-ৰ মান উলিওৱা।

(d) (i) State Taylor's theorem with Lagrange's form of remainder.

লাগ্ৰাঞ্জৰ ভাগশেষৰ ৰূপসহ টেইলৰৰ উপপাদ্যটো লিখা।

(ii) Expand $\log(\sin x)$ in powers of $(x-2)$.

$(x-2)$-ৰ ঘাটত $\log(\sin x)$ বিস্তাৰ কৰা। 3+7=10

(e) If $u=\log\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)$ show that

$u=\log\left(x^3+y^3+z^3-3xyz\right)$ হ'লে দেখুওৱা যে

(i) $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{3}{x+y+z}$

(ii) $\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u=-\frac{9}{(x+y+z)^2}$

4+6=10